
Вычислительная геометрия

А. Г. Фенстер, <http://info.fenster.name>

6 февраля 2009 г.

Прямые

Уравнение прямой

При решении геометрических задач часто бывает нужно составлять уравнение прямой, проходящей через две точки. Категорически не рекомендуется при этом пользоваться «школьной» формой записи уравнения прямой $y = kx + b$, т. к. в таком случае придётся отдельно обрабатывать случай прямой, параллельной оси OY ($x = a$).

Намного удобнее для реализации уравнение в общем виде $ax + by + c = 0$. Если прямая задана в таком виде, автоматически известен её направляющий вектор: им является вектор $(-b, a)$ (или $(b, -a)$, направленный в противоположную сторону). Соответственно, для получения уравнения прямой по двум точкам не нужно производить никаких сложных вычислений, а лишь подсчитать координаты направляющего вектора (тем самым получив коэффициенты a и b) и подставить одну из точек в уравнение для вычисления коэффициента c .

Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек, лежащих в одной из них, при подстановке в уравнение дают положительное число, в другой – отрицательное. Таким образом можно определить положение точки относительно прямой (точнее, лежат ли несколько точек в одной или в разных полуплоскостях).

Другим удобным способом определения положения точки C относительно прямой AB является вычисление знака векторного произведения векторов \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AB} (продолжение следует).

Вычисление полярных углов

Пусть дан набор точек на плоскости, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Необходимо:

1. Найти точку, лежащую ниже всех остальных точек (с наименьшей y -координатой), если таких точек несколько — взять самую левую из них (с наименьшей x -координатой). Обозначим эту точку через O .
2. Для всех остальных точек P_i вычислить угол между осью x и вектором OP_i .
3. Упорядочить точки по возрастанию этого угла.

После этих шагов точки будут упорядочены в порядке обхода против часовой стрелки.

Построение выпуклой оболочки

Этим упорядочением можно воспользоваться для построения *выпуклой оболочки* набора точек, т. е. наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего все точки из набора.

Для хранения точек выпуклой оболочки используется стек. Точки O и P_1 , где P_1 — точка с минимальным полярным углом относительно точки O , войдут в выпуклую оболочку и кладутся в стек изначально. Далее нужно перебирать точки в порядке обхода против часовой стрелки. Очередная точка P_i кладётся в стек, если она находится левее прямой, соединяющей последние две вошедшие в выпуклую оболочку (т. е. лежащие на верхушке стека) точки. Если это не так, необходимо удалять последние положенные в стек точки до тех пор, пока условие не будет выполнено.

После перебора всех точек необходимо проверить то же условие для точки O и аналогичным образом удалять точки из стека до тех пор, пока оно не будет выполнено. В результате в стеке останутся вершины многоугольника, образующего выпуклую оболочку.