

---

# Вычислительная геометрия

А. Г. Фенстер, <http://info.fenster.name>

6 февраля 2009 г.

## Прямые

### Уравнение прямой

При решении геометрических задач часто бывает нужно составлять уравнение прямой, проходящей через две точки. Категорически не рекомендуется при этом пользоваться «школьной» формой записи уравнения прямой  $y = kx + b$ , т. к. в таком случае придётся отдельно обрабатывать случай прямой, параллельной оси  $OY$  ( $x = a$ ).

Намного удобнее для реализации уравнение в общем виде  $ax + by + c = 0$ . Если прямая задана в таком виде, автоматически известен её направляющий вектор: им является вектор  $(-b, a)$  (или  $(b, -a)$ , направленный в противоположную сторону). Соответственно, для получения уравнения прямой по двум точкам не нужно производить никаких сложных вычислений, а лишь подсчитать координаты направляющего вектора (тем самым получив коэффициенты  $a$  и  $b$ ) и подставить одну из точек в уравнение для вычисления коэффициента  $c$ .

Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек, лежащих в одной из них, при подстановке в уравнение дают положительное число, в другой – отрицательное. Таким образом можно определить положение точки относительно прямой (точнее, лежат ли несколько точек в одной или в разных полуплоскостях).

Другим удобным способом определения положения точки  $C$  относительно прямой  $AB$  является вычисление знака векторного произведения векторов  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AB}$  (продолжение следует).

## Вычисление полярных углов

Пусть дан набор точек на плоскости, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Необходимо:

1. Найти точку, лежащую ниже всех остальных точек (с наименьшей  $y$ -координатой), если таких точек несколько — взять самую левую из них (с наименьшей  $x$ -координатой). Обозначим эту точку через  $O$ .
2. Для всех остальных точек  $P_i$  вычислить угол между осью  $x$  и вектором  $OP_i$ .
3. Упорядочить точки по возрастанию этого угла.

После этих шагов точки будут упорядочены в порядке обхода против часовой стрелки.

## Построение выпуклой оболочки

Этим упорядочением можно воспользоваться для построения *выпуклой оболочки* набора точек, т. е. наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего все точки из набора.

Для хранения точек выпуклой оболочки используется стек. Точки  $O$  и  $P_1$ , где  $P_1$  — точка с минимальным полярным углом относительно точки  $O$ , войдут в выпуклую оболочку и кладутся в стек изначально. Далее нужно перебирать точки в порядке обхода против часовой стрелки. Очередная точка  $P_i$  кладётся в стек, если она находится левее прямой, соединяющей последние две вошедшие в выпуклую оболочку (т. е. лежащие на верхушке стека) точки. Если это не так, необходимо удалять последние положенные в стек точки до тех пор, пока условие не будет выполнено.

После перебора всех точек необходимо проверить то же условие для точки  $O$  и аналогичным образом удалять точки из стека до тех пор, пока оно не будет выполнено. В результате в стеке останутся вершины многоугольника, образующего выпуклую оболочку.